Wythoffova hra a její taje

W. Bureš, M. Drexlerová, V. Lorenc, M. L. Skuda, V. Tureček

doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, PhD.; školitelka, KM FJFI ČVUT

Co je Wythoffova hra? A jak ji hrát?

Wythoffova hra je kombinatorická hra pro dva hráče, která spočívá v odebírání objektů z dvou disjunktních množin (obvykle reprezentovaných hromádkami herních kamenů, nebo pouze dvěma čísly).
Odebírání se řídí přesně danými pravidly – hráči se střídají v povolených tazích. Vítězem hry je ten hráč, který udělá poslední tah, resp. poraženým je ten hráč, jenž nemůže táhnout (pozice $(0;0)$).

Samotná pravidla jsou taková:

- Hráč musí odebrat alespoň jeden prvek. Nelze se tahu zdržet.
- Hráč může vzít libovolný počet prvků z jedné, nebo z druhé množiny.
- Hráč může odebrat prvky z obou množin najednou, ale musí z obou odebrat stejný počet.

Prohrávající a vyhrávající pozice

Naším cílem je udržet protihráče v takzvané prohrávající pozici, zatímco my chceme táhnout do pozic výherních. Tyto pozice (dvojice nezáporných celých čísel vyjadřující počet kamenů na hromádkách) jsou definovány rekurzivně následujícím způsobem.

- $(0;0)$ je prohrávající.
- $(x;y) \neq (0;0)$ je výherní, pokud existuje tah do prohrávající pozice.
- $(x;y) \neq (0;0)$ je prohrávající, pokud všechny tahy vedou do vyhrávajících pozic.

Je snadné si rozmyslet, že každá pozice je buď výherní, nebo prohrávající. Téže je snadné uvědomit si, že je-li $(x;y)$ prohrávající, (y,x) je prohrávající také.

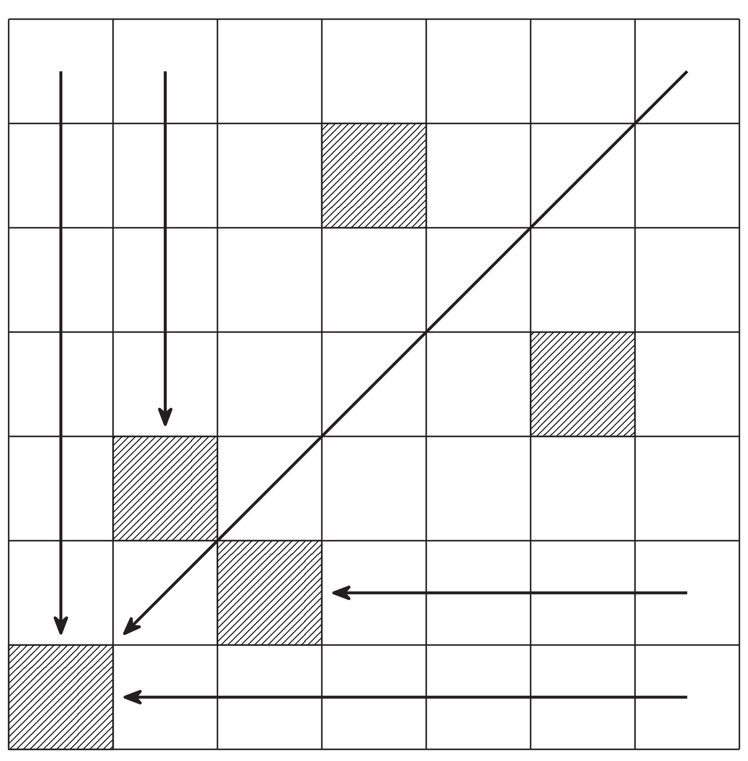
Pop it

Pop it je další podobnou kombinatorickou hrou (tzv. *substraction game*), při níž se střídají v tazích dva hráči, kteří na silikonové destičce promačkávají bubliny. Pravidla se liší tím, že mohou vždy odebírat jen 1, 2, nebo 3 prvky. Prohrává ten, kdo zamáčkne poslední pole.

Vítězná strategie této hry se liší, neb se liší i konečný stav hry: zde naopak chceme našeho protihráče nechat táhnout poslední možný tah. Cílem je tedy nechat hrát našeho spoluhráče začínat tah v pozici, kdy zbývající pole splňují $n \equiv 1 \mod 4$, tedy násobky čtyřky $+1$. Máme-li hrací plochu, která splňuje tuto vstupní podmínku, necháme soupeře začít a poté pouze doplňujeme jeho tahy tak, aby za kolo platil součet $m \equiv 0 \mod 4$, tj. zahraje-li 3, my zahrajeme 1.

Dáma na nekonečné šachovnici

Přímou reprezentací Wythoffovy hry je dáma na nekonečné šachovnici, téže známa jako zraněná dáma. Princip hry spočívá v postavení dámy do prostoru šachovnice a poté ve střídajících tazích posunu dolů (odebrání z jedné množiny), doleva (odebrání z druhé množiny), nebo po diagonále (z obou množin stejný počet). Proto je dáma zraněná – pohybuje se pouze třemi z osmi směrů.



Vítězná strategie v této verzi hry je založena na posouvání dámy na předem stanovená pole, jejichž souřadnice odpovídají prohrávajícím pozicím. Ať tedy soupeř posune dámu kamkoliv, vždy jsme schopni jej přesunout na další prohrávající pole. Takto jej dostaneme až na pozici $(0;0)$ v levém dolním rohu, odkud se již zraněná dáma nemůže pohybovat.

Rekurentní posloupnosti

Prvním způsobem, jakým jde najít prohrávající pozice, je rekurentní posloupnost. Lze dokázat, že pro množinu prohrávajících pozic P platí: $P = \{(a;b_n), (a_n; b_n)\}$, kde $a_0 = b_0 = 0$, pro $n \geq 1$ je a_n nejmenší ještě nepoužité přirozené číslo a $b_n = a_n + n$.
Takto vytvořené dvojice poté zapíšeme do tabulky, ze které v průběhu hry jednoduše zjistíme, jaká prohrávající dvojice odpovídá našim aktuálním číslům. Poté užijeme algoritmus přesunu do prohrávající pozice.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	...
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	...

Tabulka 1: Počáteční členy posloupnosti a_n a b_n

Fibonacciho zápis čísel

Druhý popis množiny prohrávajících pozic P spočívá ve Fibonacciho rozvoji přirozených čísel. Každé přirozené číslo lze napsat pomocí součtu Fibonacciho čísel. Jde o čísla definovaná vztahem $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ pro $n \geq 1$ a $f_0 = 1$ a $f_1 = 2$. Hladovým algoritmem získáme rozvoj, který obsahuje cifry 0 a 1, ale neobsahuje sekvenci 11. Např. $25 = 21 + 3 + 1 = f_6 + f_2 + f_0$, píšeme $25_F = (1000101)$. Posloupnosti (a_n) a (b_n) tvořící prvky množiny P prohrávajících pozic lze pomocí Fibonacciho rozvoje definovat také následovně:
(a_n) je ostře rostoucí a Fibonacciho rozvoj tohoto čísla má na konci sudý počet nul. (b_n) je ostře rostoucí a rozvoj tohoto čísla má na konci lichý počet nul. Snadno si rozmyslíme, že $(b_n)_F$ pouze přidává 0 za rozvoj $(a_n)_F$.
Ve hře pro menší číslo najdeme Fibonacciho rozvoj, zjistíme, zda jde o a_n či b_n, dopočítáme příslušnou dvojici, a postupujeme dle základního algoritmu přesunu do prohrávající pozice.

Zlatý řez

Poslední metodou hledání prohrávajících pozic je skrze zlatý řez. Ten nám umožňuje pro dané herní číslo (počet kamínků) zjistit, jakému a_n, resp. b_n je číslo rovno, a díky tomu již snadno spočítat jeho prohrávající dvojici.
V této strategii tedy opět nepotřebujeme tabulku, nicméně počítáme se zlatým řezem, iracionálním číslem, takže praktické použití této strategie vyžaduje určitou přesnost a zaokrouhlování. Zlatý řez je kořenem rovnice: $x^2 - x - 1 = 0$, Značíme jej $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tentokrát využíváme faktu, že prvky množiny P lze definovat jako: $a_n = \lfloor n\tau \rfloor$, $b_n = \lfloor n\tau^2 \rfloor$.
Ve hře se potom tato strategie uplatňuje takto: $\{\frac{x}{\tau}\} = \frac{x}{\tau} - \lfloor \frac{x}{\tau} \rfloor > \frac{1}{\tau^2}$, pak $x = a_n = \lfloor n\tau \rfloor$, kde $n = \lfloor \frac{x+1}{\tau} \rfloor$. Naopak platí: $\{\frac{x}{\tau}\} < \frac{1}{\tau^2}$, pak $x = b_n = \lfloor n\tau^2 \rfloor$, kde $n = \lfloor \frac{x+1}{\tau^2} \rfloor$. Jsme si tedy vždy schopni dopočítat potřebnou dvojici (můžeme přičítat, nebo odečítat n) a poté už jen užít základní algoritmus směřující do prohrávající pozice.

Algoritmus přesunu do prohrávající pozice

Naší strategií tedy je najít si prohrávající pozice a poté do nich vždy dostat protihráče. Máme tedy aktuální počty $(x;y)$ a víme, jaké jsou prohrávající pozice $(a_n; b_n)$ s oběma čísly, budeme tedy postupovat takto:

- $b_n = x < y$, pak uberu z y $y - a_n$ a dostanu $(x; a_n) = (b_n; a_n)$.
- $a_n = x < b_n < y$, pak uberu z y $y - b_n$ a dostanu $(x; b_n) = (a_n; b_n)$.
- $a_n = x < y < b_n$, pak spočítám $n > k = y - x$, najdu $(a_k; b_k)$ a uberu stejný počet z obou hromádek, abych se dostal na tento počet.

Pozorování: prohrávajících pozic je oproti výherním mnohem méně a jde o specifické, na první pohled nahodilé kombinace, proto je velice nepravděpodobné, že by nás soupeř neznalý této množiny navedl na takováto pole. Pokud by se tak však stalo, můžeme hrát téměř libovolně a soupeř nás pravděpodobně v příštím tahu postaví opět na výherní pozici.

Reference

1. VOPRAVIL, V. Nestranné hry. *Učitel matematiky*. 2018, roč. 26, č. 2. Dostupné také z: https://ojs.cuni.cz/ucitel/article/view/993.
2. WYTHOFF, W. A. A modification of the game of Nim. *Nieuw Arch. Wisk*. 1907, roč. 7, č. 2, s. 199–202.
3. COMMONS, W. *Pop it*. 2021. Dostupné také z: https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:%D0%9F%D0%BE%D0%BF-%D0%B8%D1%82.jpg. [cit. 2024-06-18].

drexlerova.monika@seznam.cz; skuda.maxmilian@email.cz