

Ako pomocou vlastných čísiel skrotiť Fibonacciho králiky

Jakub Kíni, Matúš Martinec, Kristýna Mičková, Jakub Mynář,

Obsah prezentácie

- Úvod do problematiky
- Vektory
- Matice
- Determinant matice
- Spektrálna teória
- Vlastné čísla a vlastné vektory
- Diagonalizovateľnosť matíc
- Ako ich skrotiť?

Úvod do problematiky



Úvod do problematiky



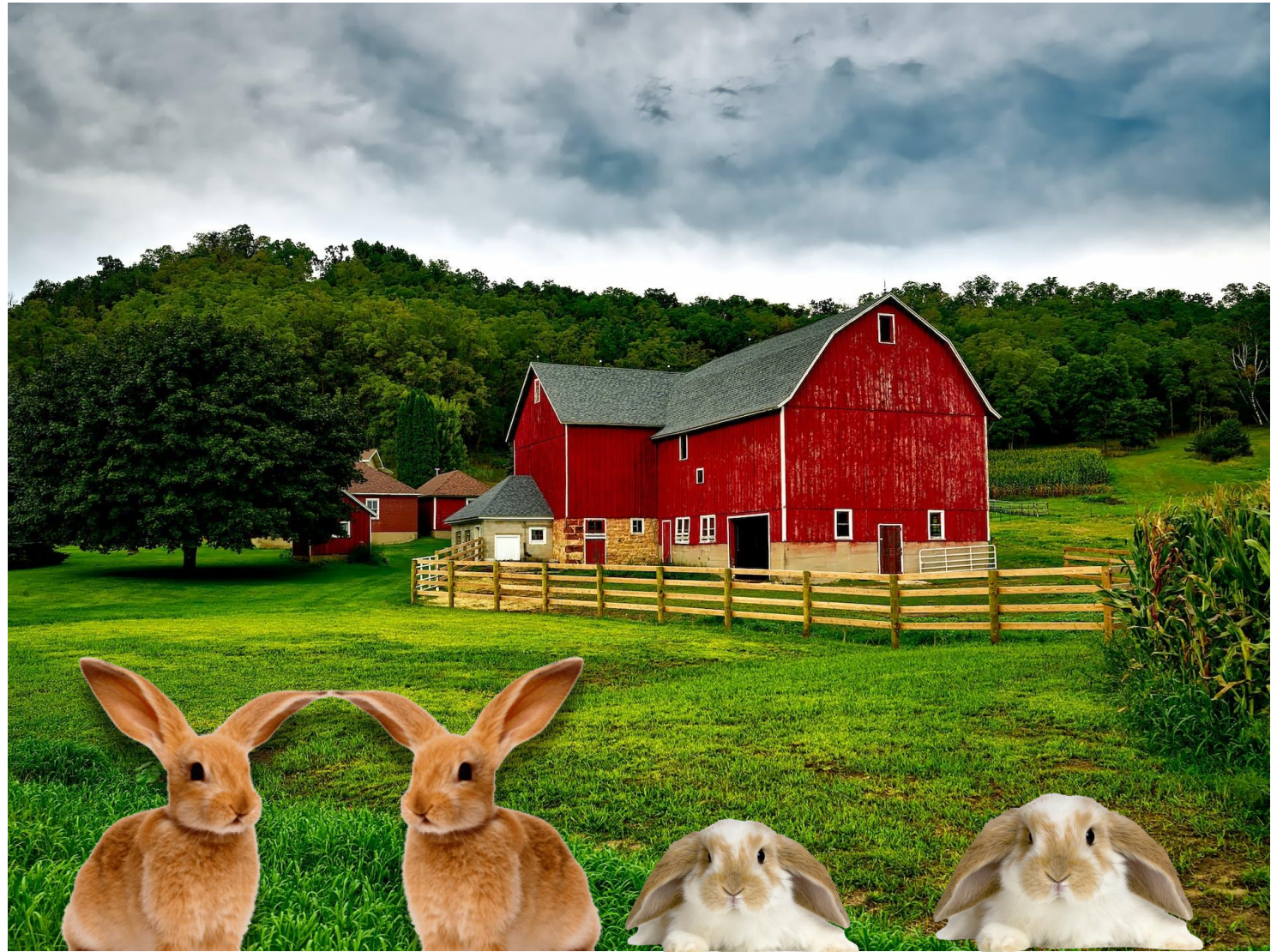
Úvod do problematiky



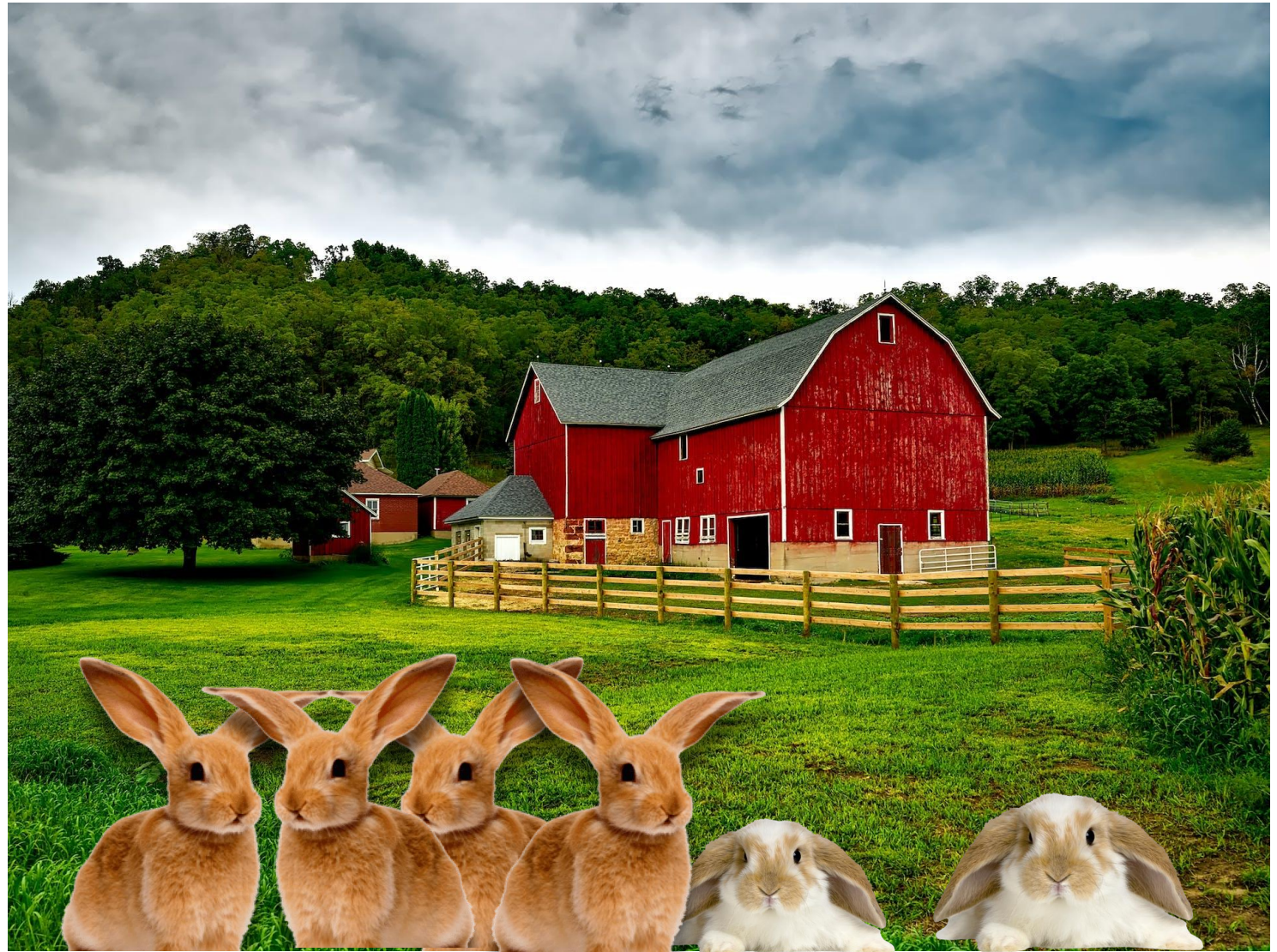
Úvod do problematiky



Úvod do problematiky



Úvod do problematiky



Úvod do problematiky



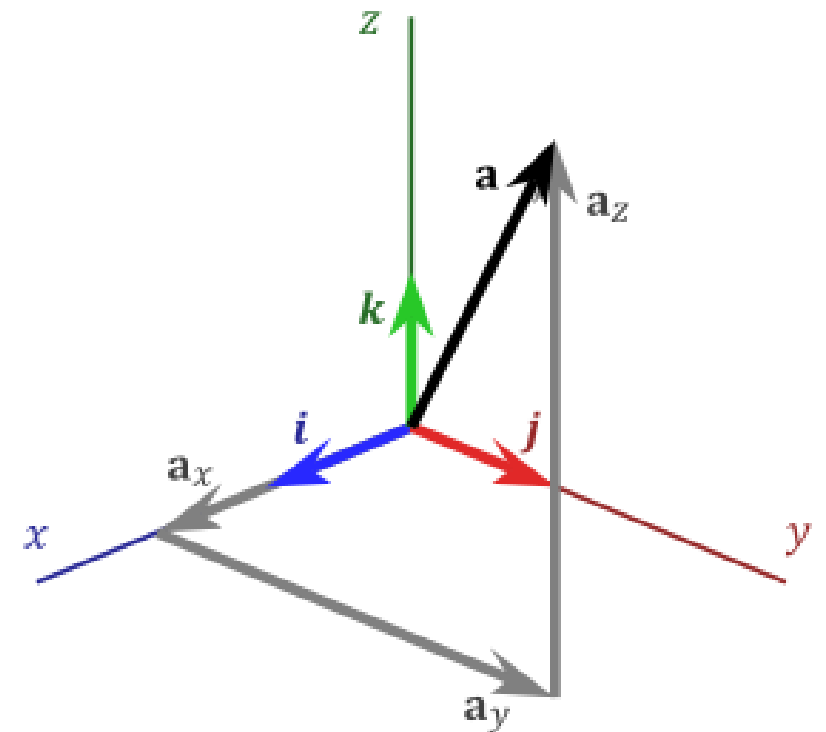
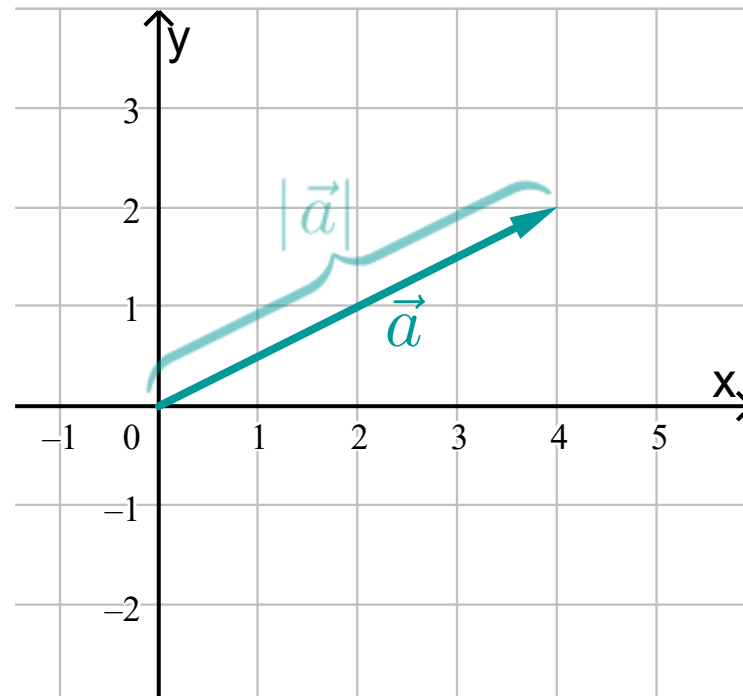
Úvod do problematiky



Koľko ich bude za
 n mesiacov?

Vektory

- Matematický objekt, ktorý ma veľkosť a smer
- ~ GPS súradnice – ako sa dostať z bodu A do bodu B



Matice

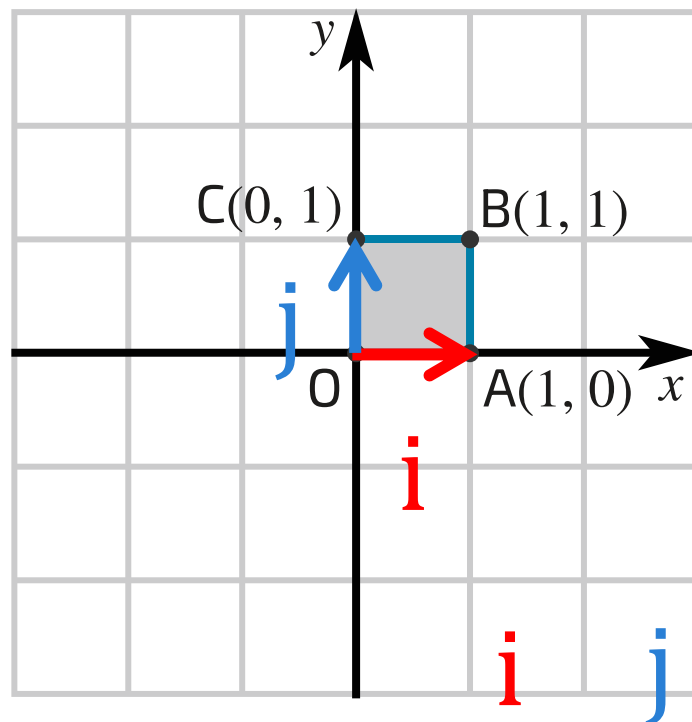
- Tabuľka obsahujúca čísla alebo iné matematické objekty
- Lineárne transformácie priestoru

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 5 & 15 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

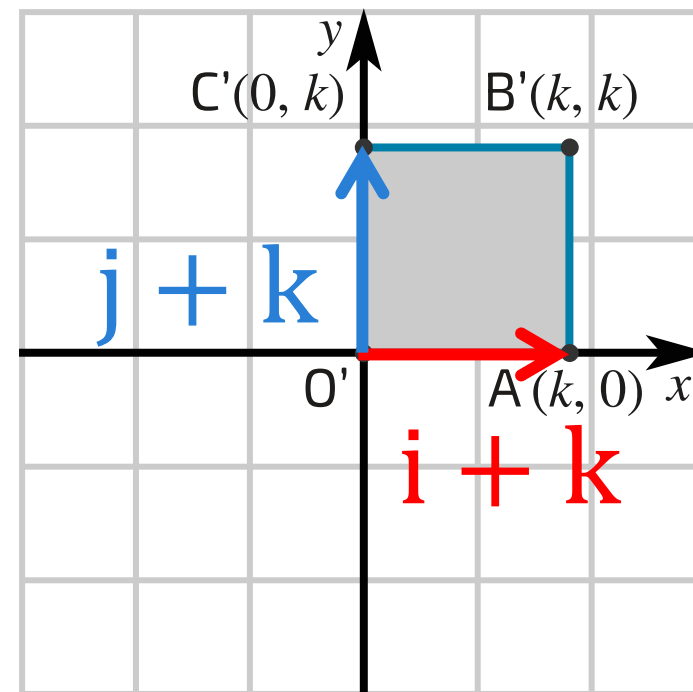
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(?)

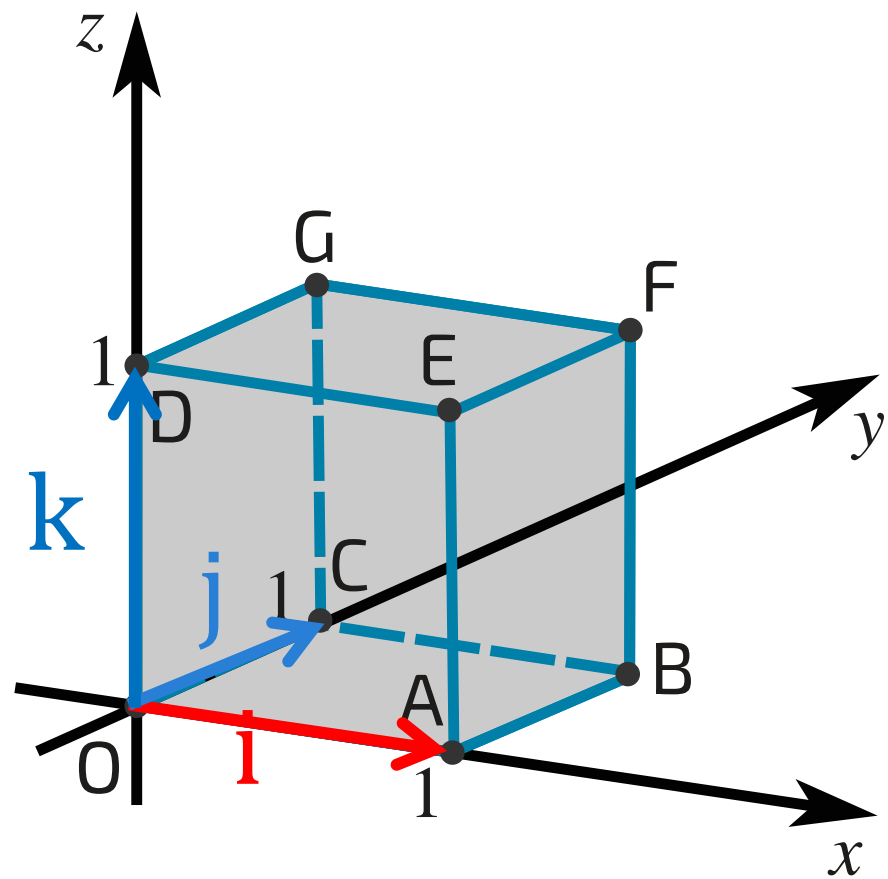
Matrice



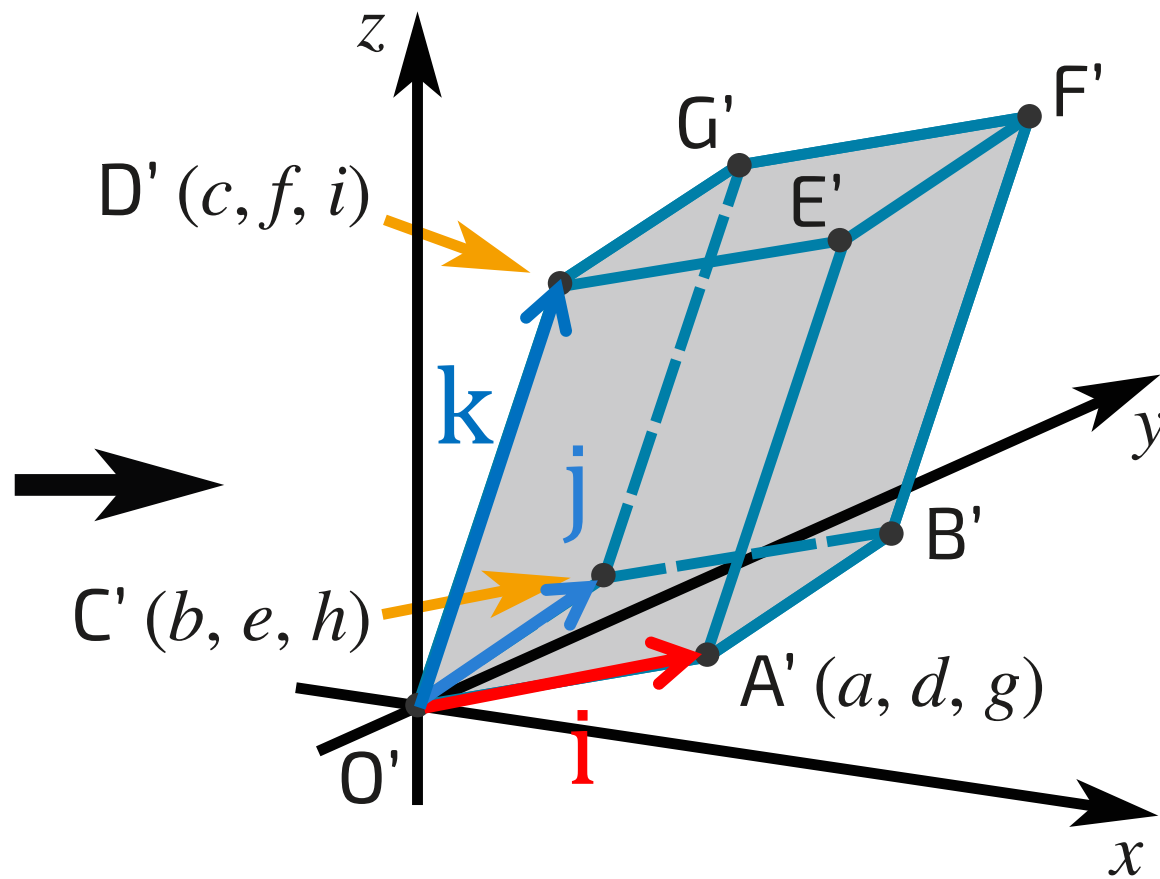
$$i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 + k & 0 \\ 0 & 1 + k \end{pmatrix}$$



(a)



(b)

Vzájomné operácie medzi maticami

- Sčítavanie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

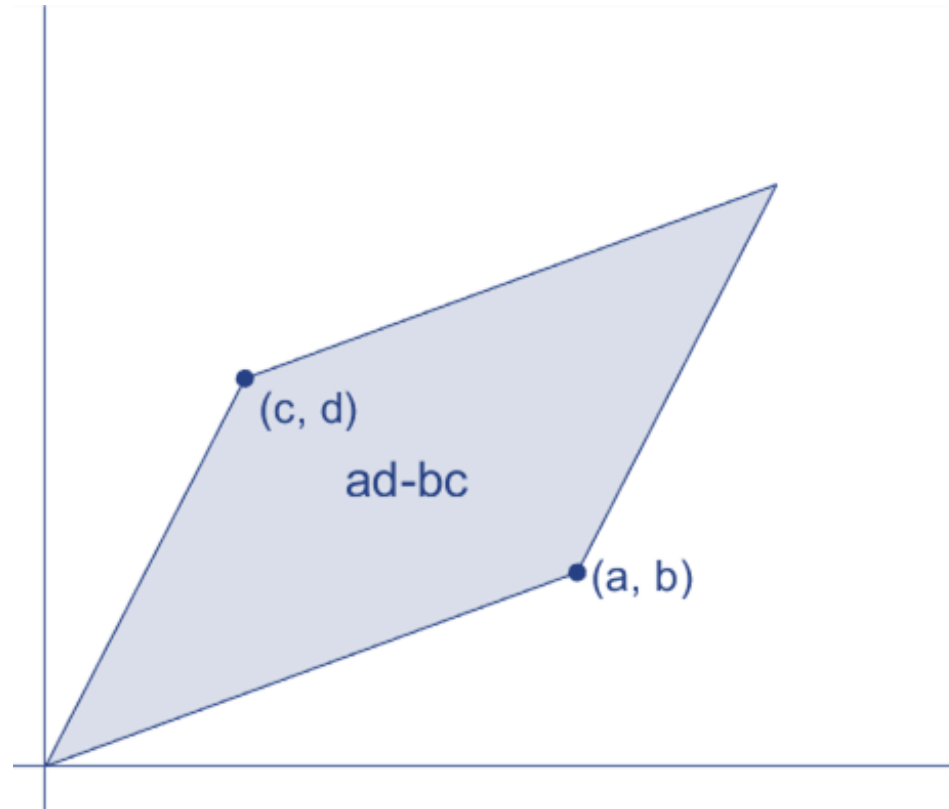
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

- Násobenie

$$\begin{array}{c} \vec{a}_1 \rightarrow \\ \vec{a}_2 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \vec{b}_1 \quad \vec{b}_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 \end{bmatrix} \\ A \qquad B \qquad C \end{array}$$

Determinant matice

- Determinant je skalárna hodnota, ktorú priradujeme štvorcovej matici – obsahuje informáciu o tom ako transformuje plochu alebo obsah priestoru
- Testovanie invertibilnosti matice a hľadanie vlastných čísiel a vektorov



Ako ho získame
/
vypočítame?

Matica 2x2

$$M_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$D_{2 \times 2} = ad - bc$$

Matica 3x3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad |A| = \begin{array}{ccccc} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

Sum of products along **red arrow**
minus sum of products along **blue arrow**

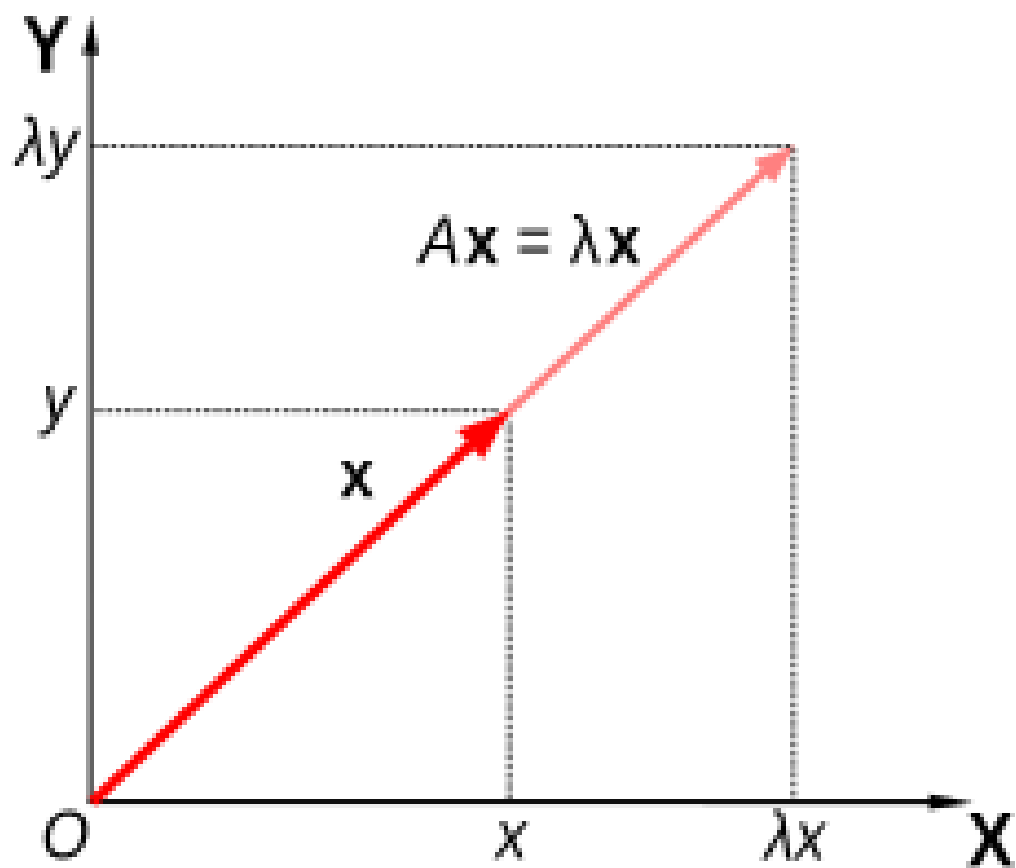
$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Spektrálna teória

- Spektrálna teória pri maticiach sa zaoberá vlastnými číslami a vlastnými vektormi
 - Analyzuje ich štruktúru a vlastnosti
- Čo je to vlastné číslo?
- Čo je to vlastný vektor?
- Čo to znamená, že matica je diagonalizovateľná?

Vlastné čísla a vlastné vektory

- Vlastný vektor
 - Je nenulový vektor $\vec{v}$ matice A , ktorý po jej pôsobení na priestor zostáva rovnobežný sám so sebou
 - $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$
 - Kde λ je vlastné číslo vektora $\vec{v}$
- Vlastné čísla
 - Také číslo matice, pre ktoré existuje nenulový vektor $\vec{v}$ pre ktorý platí
 - $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$



Ako nájdeme
vlastné čísla a
vektory?

$$\bullet A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\bullet A\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}$$

$$\bullet A\vec{v} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\bullet (A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) \vec{v} = \vec{0}$$

$$\bullet \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \vec{v} = \vec{0}$$

$$\bullet \vec{v} \neq \vec{0} \implies \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Ako nájdeme vlastné čísla?

- $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$

- Charakteristický polynóm

- $p(\lambda) = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$

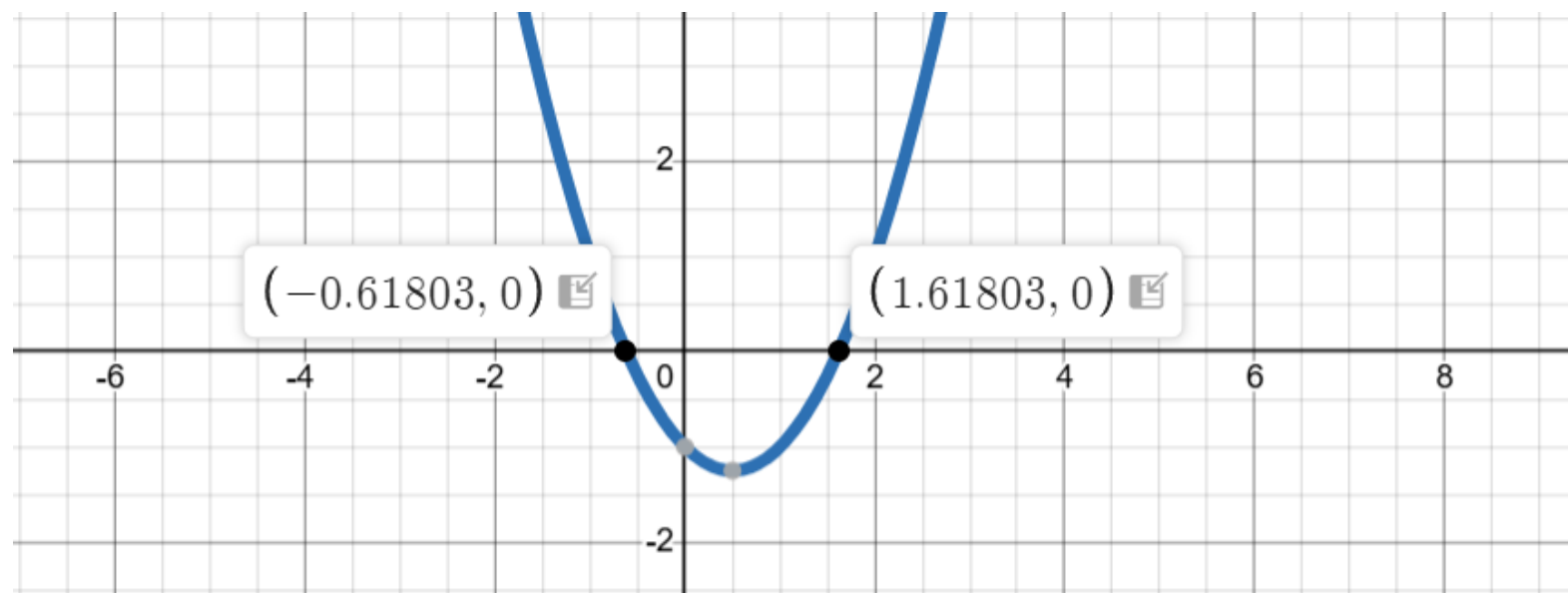
- Výpočtom získame 0, 1 alebo 2 reálne korene –
predstavujú vlastné čísla matice

Ako nájdeme
vlastné čísla?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left| A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$



Ako nájdeme
vlastné vektory?

$$\lambda_1 = \tau \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \tau & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \tau' \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \tau' & 1 \\ 1 & -\tau' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau' \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\tau & -\tau' \end{pmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{|X|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ -\tau' & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizovateľná matica

- Diagonalizácia znamená, že matica sa dá „prepísať“ do jednoduchšej diagonálnej formy
- Táto diagonálna matica D obsahuje vlastné čísla matice A na diagonále.

$$A = XDX^{-1}$$

$$X^{-1}(A)X = \cancel{X^{-1}X}D\cancel{X^{-1}X}$$

$$X^{-1}AX = D$$

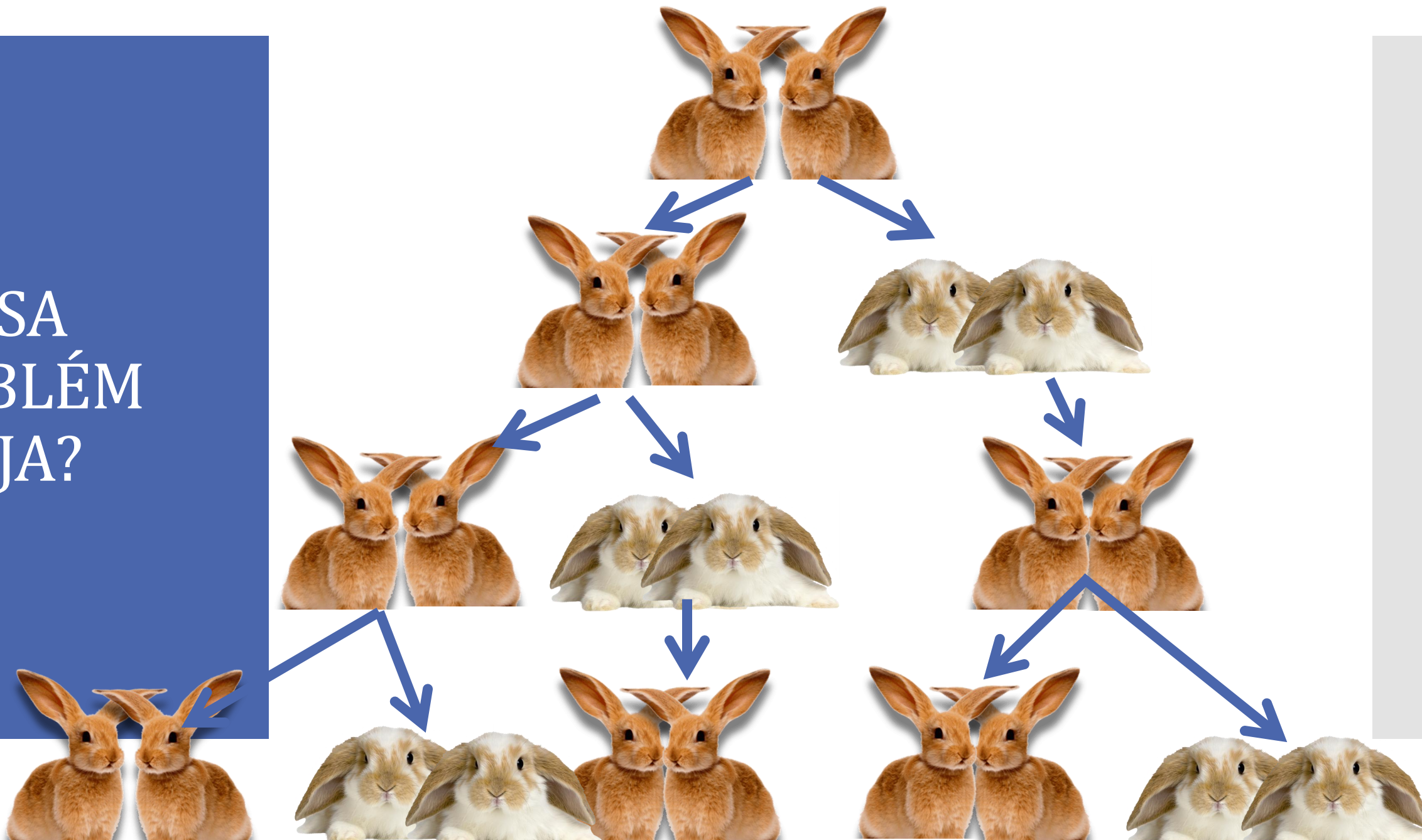
$$X^{-1}X = I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

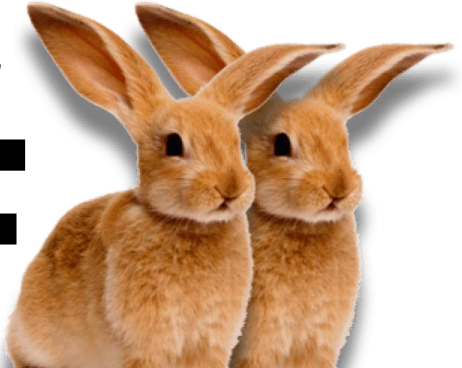
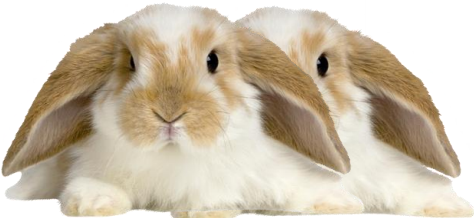
$$D = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}$$

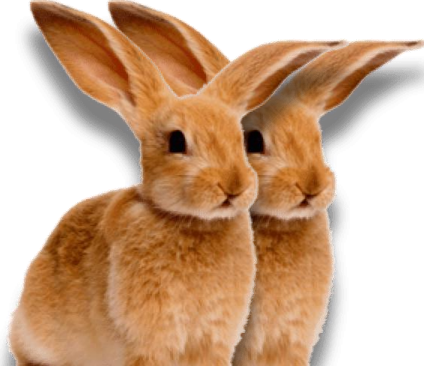
$$A^n = XD^n X^{-1}$$

$$A^n = XD \cancel{X^{-1}XD} \cancel{X^{-1}XD} \cancel{X^{-1}XD} \cancel{X^{-1}XD} \cancel{X^{-1}XD} \cancel{X^{-1}XD} \dots\dots\dots$$

AKO SA
PROBLÉM
VYVÍJA?



 =  + 
 $n + 1$ n n

 = 
 $n + 1$ n

Zapísané pomocou matic

- $d = \text{\#dospelých párov}$
- $m = \text{\#mladých párov}$
- $d_{n+1} = d_n + m_n$
- $m_{n+1} = d_n$
- $$\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ m_n \end{pmatrix}$$

Vlastné čísla a diagonalizovaná matica

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left| A - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = 0$
 - $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$
 - $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$
 - $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$
 - $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \tau'$
- $\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \tau' \end{array} \right\} D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
- $D = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \tau' \end{pmatrix}$

Vlastné vektory

- $\lambda_1 = \varphi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \tau & 1 \\ 1 & -\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau \end{pmatrix}$
- $\lambda_2 = \tau \rightarrow \begin{pmatrix} 1 - \tau' & 1 \\ 1 & -\tau' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -\tau' \end{pmatrix}$
- $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\tau & -\tau' \end{pmatrix}$
- $X^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ -\tau' & -1 \end{pmatrix}$

Za n
mesiacov...

- $A^n = XD^nX^{-1}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\tau & -\tau' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau^n & 0 \\ 0 & \tau'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau & 1 \\ -\tau' & -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau^{n+1} - \tau'^{n+1} \\ \tau^n - \tau'^n \end{pmatrix}$

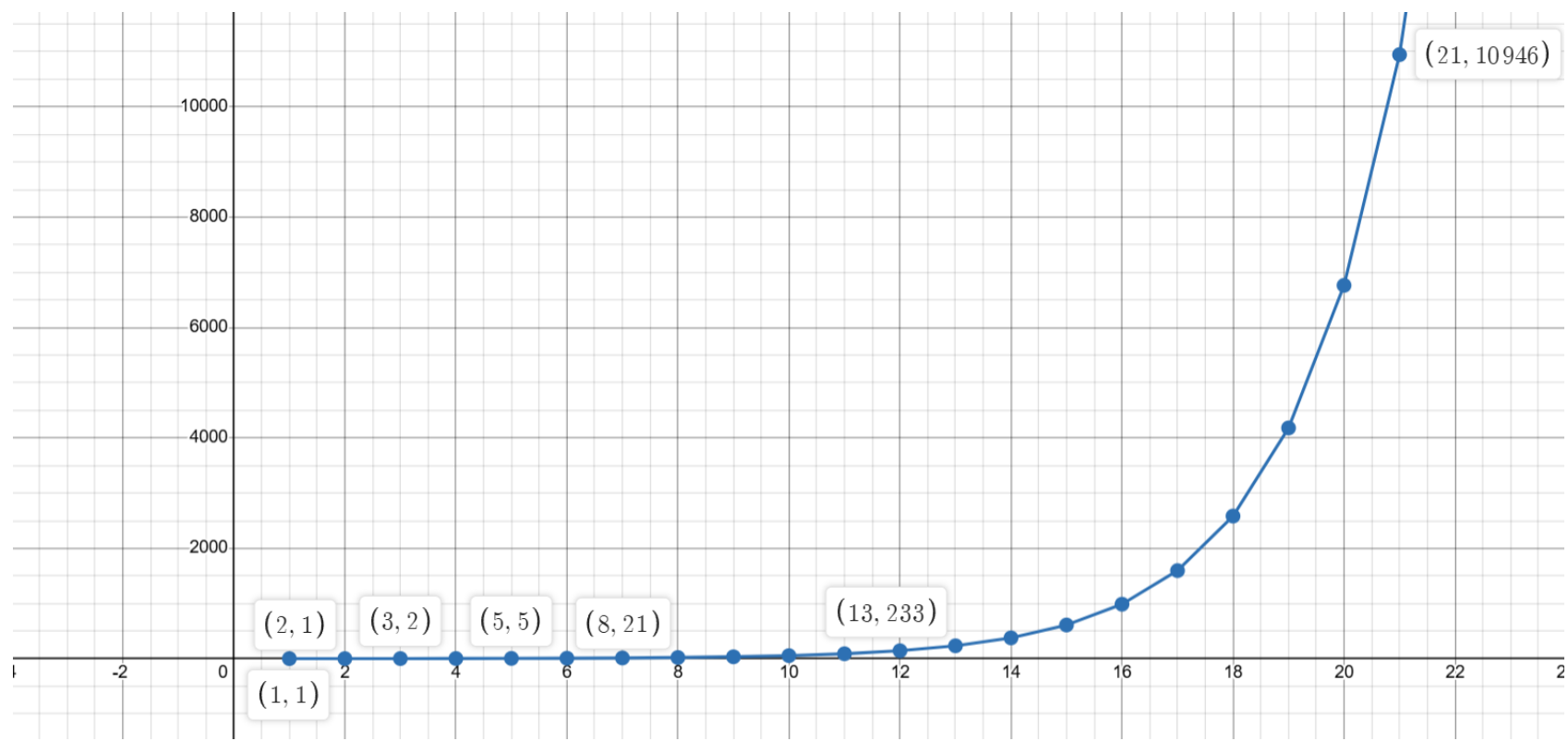
- $\begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau^{n+1} - \tau'^{n+1} \\ \tau^n - \tau'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $d_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^{n+1} - \tau'^{n+1})$

- $m_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\tau^n - \tau'^n)$

Za n
mesiacov...

$$\bullet \begin{pmatrix} d_{n+1} \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau^{n+1} - \tau'^{n+1} \\ \tau^n - \tau'^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Zdroje

- Prezentácia: Jak pomocí vlastních čísel ochočit Fibonacciho králíky, doc. Ing. Ľubomíra Dvořáková, Ph.D. a Ing. Petr Ambrož, Ph.D.
- <https://www.britannica.com/science/linear-algebra>
- <https://www.britannica.com/science/matrix-mathematics>
- Obrázky:
- Online. Dostupné z: <https://exoticdirect.co.uk/news/feeding-your-rabbit-importance-healthy-diet/>. [cit. 2025-06-24].
- Online. Dostupné z: <https://vethelpdirect.com/pet-health-library/management-rabbit-stress/>. [cit. 2025-06-24].ň
- Online. Dostupné z: <https://regroceries.com/product/buy-orange-carrot-online/>. [cit. 2025-06-24].
- Program Desmos

Ďakujeme za
pozornost'

