

Jak se valí válec

Kateřina Jiráková*, Ondřej Grover**

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, Břehová 7, 115 19, Praha 1

*jirakkat@fjfi.cvut.cz, **groveond@fjfi.cvut.cz

Abstrakt

Cílem našeho projektu bylo rozvinout úlohu o valení válce po nakloněných rovinách s různým koeficientem tření. Jeho chování jsme popisovali postupně teoreticky, pomocí počítačové simulace a reálným pokusem. Výsledky jsme se pak pokusili sloučit do jednotné předpovědi.

1 Úvod

Tento projekt byl inspirován zápočtovou úlohou z předmětu Mechanika. Úkolem bylo vypočítat, do jaké výšky vyjede válec, jestliže je spuštěn z nakloněné roviny s neprokluzujícím povrchem, sjede na vodorovnou neprokluzující podložku a pak vyjede na nakloněnou rovinu s dokonale prokluzujícím povrchem. Teoreticky lze poměrně jednoduše vypočítat, do jaké výšky válec vyjede poprvé, ale mnohem složitější je teoreticky odvodit, jak se bude chovat při sjezdu nazpět. Proto jsme se rozhodli experimentálně a v simulaci ověřit teoretický výpočet pro první dojezd a zjistit, jak by se těleso mělo chovat při druhém sjezdu.

2 Teoretické řešení

Nejdříve jsme se zabývali řešením pro tuhé těleso a dokonale prokluzující nebo neprokluzující povrchy. Uvažujeme tedy nulové ztráty energie, což nám umožňuje vypočítat dojezdovou výšku ze zákona zachování mechanické energie (dále jen ZZME). Předpokládáme, že na rozhraních se vektor rychlosti válce okamžitě změní tak, že jeho směr bude rovnoběžný s aktuální podložkou a jeho velikost zůstane stejná.

Celková energie válce je určena jeho počáteční výškou, $E_{p0} = mgh_0$. Když se začne valit dolů, mění se jeho potenciální energie na kinetickou (1). Lze přitom rozlišit energii posuvnou $T_p = \frac{1}{2}mv^2$, a energii rotační $T_r = \frac{1}{2}I\omega^2$.

$$E_{p0} = T_p + T_r = \frac{1}{2} \left(mv^2 + \frac{1}{2}mr^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 \right) = \frac{3}{4}mv^2 \quad (1)$$

Zatímco válec vyjíždí po prokluzující nakloněné rovině, jeho kinetická posuvná energie se mění zpět na potenciální, ale kinetická rotační energie zůstává stále stejná, protože proti rotaci žádná síla nepůsobí. Válec nabude pouze části své původní potenciální energie a tedy jen části rozjezdové výšky (2).

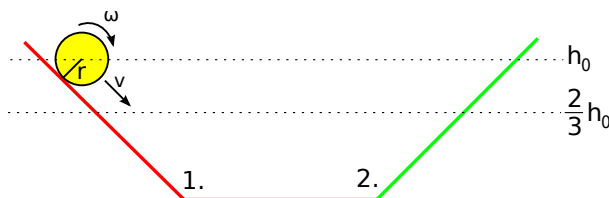
$$h = \frac{T_p}{mg} = \frac{\frac{2}{3}E_{p0}}{mg} = \frac{2}{3}h_0 \quad (2)$$

Ve výšce h se válec zastaví a začne klouzat zpátky dolů. Důležité přitom je, že klouzá proti směru, který určuje jeho rotace. Ve chvíli, kdy se dotkne neprokluzující roviny, však nastává problém. Vlivem setrvačnosti těžiště se posouvá směrem na vodorovnou rovinu, zatímco rotace vyžaduje odvalení se zpět na nakloněnou rovinu. Jako první jsme zavrhlí možnost, že by ho tato nespojitá situace donutila zastavit, protože to by znamenalo porušení ZZME. Další možností je, že se válec na tomto rozhraní “odrazí” a začne se pohybovat zpět po nakloněné rovině nahoru. Zda si zachová stejnou T_r , není jasné. Třetí možnost je, že se směr rotace změní skokem na opačný, válec se “překulí” a pokračuje po vodorovné rovině. Oba tyto případy zachovávají mechanickou energii. Rozhodnout mezi nimi však není v kompetenci teoretického popisu tuhého tělesa.

2.1 Řešení pro reálné těleso

Reálné těleso, které může ztrácet energii a částečně prokluzovat, poskytuje lepší odhad chování na 2. rozhraní. Průběh úlohy bude v podstatě stejný, pouze nevystoupá do stejné výšky jako tuhé těleso.

Na 2. rozhraní při sjezdu brzdí třecí síla způsobí určité ztráty rotační a posuvné kinetické energie, když se válec snaží proklouznout. Pokud se rychleji ztratí rotační kinetická energie, válec se bude chvíli prokluzovat, dokud se nepřestane otáčet, pak se začne o něco pomaleji otáčet na druhou stranu. Pokud se naopak rychleji ztratí posuvná kinetická energie, válec se přestane po chvíli prokluzování posunovat a začne se valit zpět.



Obrázek 1: Schéma úlohy

3 Simulace

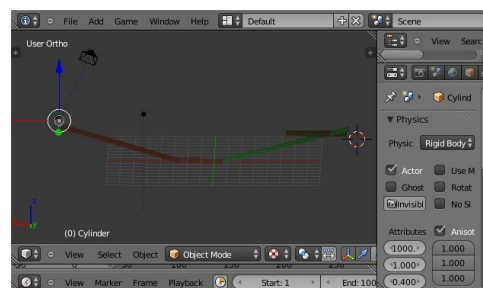
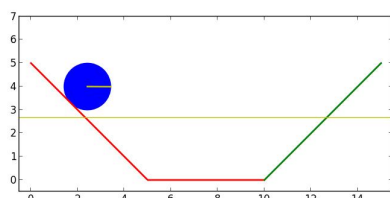
Největší výzvou pro simulování tohoto děje byla otázka odrazu a také náhlý přechod na neprokluzující plochu, resp. jev “neprokluzování”. Proto byly provedeny dvě simulace, každá se snažila tyto komplikace vyřešit jiným způsobem.

3.1 Simulace pohybu tuhého tělesa

První simulace (ukázka na Obr. 2a) byla založena na modelu tuhého tělesa. Pro numerické řešení pohybových rovnic jsme použili Eulerovu metodu. Válec se pohyboval vlivem momentu dvojice sil [1, 2] – složky tíhové síly $F = mg \sin \alpha$ a stejně velké, opačně orientované třecí síly (která zabráňuje prokluzování). Ty mu udělily okamžité úhlové zrychlení

$$\epsilon = \frac{r F_{G_{pohyb}}}{I_v} = \frac{2g \sin \alpha}{r}. \quad (3)$$

Neprokluzování na daných površích jsme zabezpečili okrajovou podmínkou pro obvodovou rychlost $v = \omega \cdot r$. Na 2. rozhraní předpokládáme stejné chování jako u teoretické představy o pohybu tuhého tělesa.



(a) První simulace s použitím Eulerovy metody a teorie tuhého tělesa (b) Druhá simulace v programu Blender s použitím Bullet simulation engine

Obrázek 2: Ukázky záběrů z obou provedených simulací

Simulace probíhala dle očekávání: válec sjel dolů, pokračoval po vodorovné podložce a pak na prokluzující nakloněné rovině vyjel do výšky přibližně $\frac{2}{3}h_0$. Při návratu na rozhraní mezi prokluzující a neprokluzující plochou se válec odrazil zpět na prokluzující plochu a vyjel zpět do téměř stejné výšky. Z důvodu numerické nepřesnosti simulace (která pravděpodobně vzniká při skokovém přechodu na rozhraních) pouze nenajel přímo na nakloněnou rovinu, ale pohyboval se kousek pod ní.

3.2 Simulace reálného chování

Druhá simulace (ukázka na Obr. 2b) byla založena na modelu pružného tělesa s reálnými koeficienty tření a ztrátami energie. Simulace byla vytvořena v programu Blender (verze 2.66) s Bullet simulation engine.

Pro splnění podmínek zadané úlohy jsme museli na rozhraních nakloněných rovin a vodorovné podložky předpokládat určité ztráty energie vlivem nepružnosti materiálu válce, jinak by se válec odrazil a odskákal pryč. Pružnost materiálu jsme proto v simulaci nastavili pouze tak vysokou, aby se při daných rozměrech válec na rozhraní neodrazil.

Podobně jako u první simulace vše proběhlo dle očekávání (včetně dojezdu do výšky $\frac{2}{3}h_0$), až do návratu na 2. rozhraní. Oproti první simulaci se válec neodrazil nazpět, ale přestal se otáčet, chvíli klouzal dál po vodorovné rovině a nakonec začal rotovat opačným směrem. Došlo tedy ke ztrátě T_r .

4 Pokus

Základem provedení pokusu bylo nalézt válec z materiálu, který má s jedním povrchem nízké a s druhým vysoké tření. Uvažovali jsme o ocelovém válečku, ledu a smrkovém papíru. Zvláště led se však při pokojové teplotě ukázal jako nestabilní a k pokusu nevhodná látka. Proto jsme v zájmu rozdílu tření upustili od přesné replikace úlohy a přešli k analogickému tělesu - ozubenému kolečku s osičkou.

Na Obr. 3 vidíme schéma našeho pokusu. Cesta ozubeného kolečka začíná v nejvyšším bodě dráhy s vysokým třením, plastové lišty s drážkou ve tvaru U. Drážka drží ozubené kolo v požadovaném směru a zároveň zajišťuje dostatečné tření, aby zuby kolečka neprokluzovaly. Vodorovná část dráhy je vyrobena ze stavebnice Merkur. Na ní se kolečko nepohybuje po zubech na svém obvodu, nýbrž spočívá na osičce připevněné k jeho středu. Díky malému průměru osičky a jejímu hladkému povrchu je tření s dráhou minimální¹. Třetí a poslední část dráhy se sestává z páru vyhlazených plastových tyček o kruhovém průřezu. Jejich materiál, povrchová úprava i tvar byly vybrány tak, aby plně podporovaly váhu kolečka (a udržely ho ve správném směru), avšak zároveň nabízely co nejmenší plochu ke tření.



Obrázek 3: Fotografie sestaveného pokusu

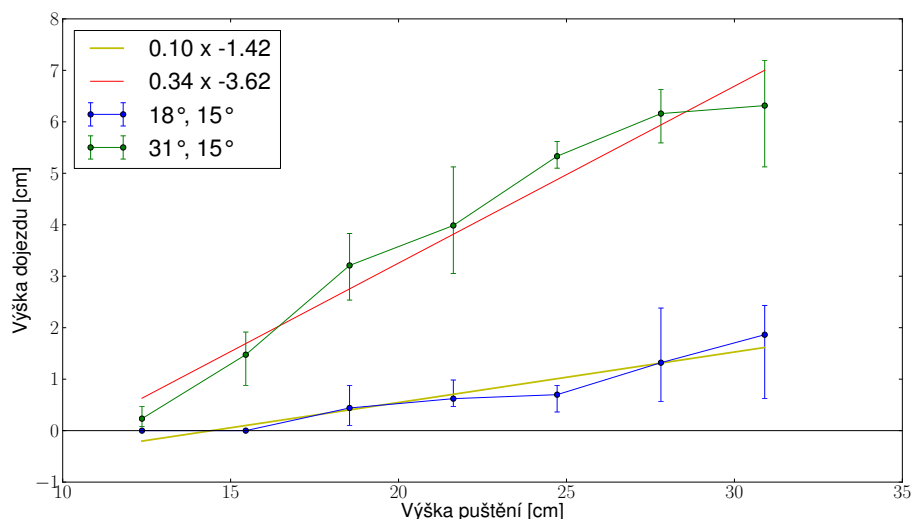
4.1 Výsledky měření

Při vyhodnocování byly problematické vysoké ztráty energie, především na bodech ohybu dráhy. Ve většině případů vyjelo kolečko do přibližně poloviční výšky, než předpovídal výpočet, jak je vidět na

¹Zde došlo za účelem zmenšení ztrát energie k pozměnění zadání úlohy. Původně má vodorovná část dráhy mít tření tak velké, že nedochází k prokluzování. Z technických důvodů, jako správné nasměrování kolečka k druhému ohybu dráhy, jsme se však rozhodli provést přechod od obvodových zubů ke středové osičce už zde. Tření vodorovné části dráhy zůstává v porovnání s plně prokluzující částí dostatečně vysoké.

Obr. 4. V souladu s teoretickou předpovědí pak začalo klouzat zpátky, zatímco se stále otáčelo směrem dopředu. V dalším ohybu dráhy se nejzřetelněji projeví ztráty energie. Kolečko se občas úplně zastavilo, jakmile se dotklo vodorovného povrchu. Jindy se trochu odrazilo díky své rotaci zpátky na dráhu bez tření. Za nejdůležitější považujeme ty případy, ve kterých kolečko sklouzlo několik centimetrů po vodorovné dráze, pak se jeho posuvný pohyb zastavil a převládla rotace, takže se začalo kutálet opět k rozhraní.

Tyto výsledky, spolu s faktem, že rotace kolečka si vždy držela původní směr, nás přesvědčily, že bližší realitě je řešení úlohy takové, že rotace si zachová svůj směr. To znamená, že v ideálním případě válec se vymrští zpátky na plochu, kde plně prokluzuje, s nezměněnou rotací.



Obrázek 4: Graf naměřených dat. Modré datové body ukazují první sérii měření s rozjezdovou nakloněnou rovinou pod úhlem $\alpha_1 = 18^\circ$ a dojezdovou pod úhlem $\alpha_2 = 15^\circ$, v druhém měření (zelené datové body) byla první nakloněná rovina pod úhlem $\alpha_1 = 31^\circ$. Červená a modrá úsečka ukazují lineární fit jednotlivých měření.

5 Závěr

Teoretický náhled, simulace i pokus se shodují na chování válce až do sjezdu na 2. rozhraní, přičemž vykazují přibližně stejnou výšku 1. dojezdu. V tom, co se stane na 2. rozhraní, si však odporují. Zatímco simulace tuhého tělesa i pokus naznačují, že převládne rotace, simulace reálného tělesa svědčí v prospěch zachování směru posuvného pohybu.

6 Poděkování

Rádi bychom poděkovali Ing. Daliboru Karáskovi, autorovi úlohy, za její zadání, dále Ing. Milanu Jirákoví za pomoc při sestavení pokusu a RNDr. Davidu Břeňovi, Ph.D. za teoretický vhled.

Reference

- [1] I. Štoll, *Mechanika. Skripty FJFI ČVUT*, ČVUT, Praha (1995) 174
- [2] Catharine H. Colwell, *PhysicsLAB: Rotational Dynamics: Rolling Spheres/Cylinders*, http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=3&filename=RotaryMotion_RotationalDynamicsRollingSpheres.xml